

Série 5

Calcul intégral
2010-2011

Exercice1:

Calculer les intégrales suivantes :

- a) $\int_1^2 \frac{1}{x} (2x^3 - x + 3) dx$ b) $\int_0^4 \sqrt{x} (x^2 - 3\sqrt{x}) dx$ c) $I = \int_0^1 \frac{x^3}{x-1} dx$ d) $J = \int_{-1}^0 x^3 \sqrt{1-x^4} dx$
e) $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln^3(x)}$ f) $\int_0^{\ln(3)} \frac{1}{e^{-x} + 1} dx$ h) $L = \int_0^\pi \cos(x) \sin(2x) dx$ i) $\int_{-1}^1 e^{x^2} dx$ k) $\int_{\frac{1}{e}}^e \frac{1}{x} |\ln(x)| dx$

Exercice2:

1) a) Vérifier que : $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 + 2 = (x+1)^2 - 2(x+1) + 3$.

b) Calculer l'intégrale $M = \int_0^3 \frac{x^2 + 2}{\sqrt{x+1}} dx$.

2) On considère les intégrales : $I = \int_0^{\ln(16)} \frac{e^x + 3}{e^x + 4} dx$ et $J = \int_0^{\ln(16)} \frac{1}{e^x + 4} dx$.

a) Calculer les valeurs de $I - 3J$ et $I + J$.

b) En déduire les valeurs de I et J .

Exercice3 :

1) Calculer à l'aide d'une intégration parties , l'intégrale : $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2(x)} dx$.

2) a) Déterminer le réels a, b et c tels que $\forall x \in \mathbb{R}^* : \frac{1}{x(x^2 + 1)} = \frac{a}{x} + \frac{bx + c}{x^2 + 1}$.

Calculer l'intégrale : $J = \int_1^2 \frac{dx}{x(x^2 + 1)}$.

b) Déterminer une primitive de la fonction : $x \mapsto \frac{x}{(x^2 + 1)^2}$.

c) Calculer , en intégrant par parties , l'intégrale : $K = \int_1^2 \frac{x \ln(x)}{(x^2 + 1)^2} dx$.

Exercice4:

1) Poser $t = \frac{1}{x}$ et calculer l'intégrale : $I = \int_{\frac{1}{e}}^e \frac{\ln(x)}{1+x^2} dx$.

2) Calculer l'intégrale $J = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos(x)}$ en posant $t = \tan(\frac{x}{2})$.

3) a) Vérifier que : $\forall x \neq -1 : \frac{x^2}{x+1} = x - 1 + \frac{1}{x+1}$.

b) Calculer l'intégrale : $I = \int_0^1 \frac{x^2}{x+1} dx$.

c) Montrer que : $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} dx = 2I$. Poser : $t = \sqrt{x}$.

d) Calculer , par parties , l'intégrale : $J = \int_0^1 \ln(1+\sqrt{x}) dx$.

Exercice5:

1) Soit la fonction définie par : $F :]0;1[\rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(t)} dt$.

a) Montrer que : $\forall x \in]0,1[, \forall t \in [x^2, x] : -\frac{x^2}{t \ln(t)} \leq -\frac{1}{\ln(t)} \leq -\frac{x}{t \ln(t)}$.

b) Encadrer $F(x)$ puis calculer $\lim_{x \rightarrow 1^-} F(x)$.

2) Montrer que F est dérivable et calculer sa dérivée .

Exercice6:

On pose : $\forall n \geq 0 : I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(x) dx$.

1) Calculer I_0, I_1, I_2 et I_3 .

2) a) Trouver une relation entre I_n et I_{n+2} . Intégration par parties

b) En déduire les valeurs de I_4 et I_5 .

Exercice7:

On pose : $\forall n \geq 0 : I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+1} dx$.

1) Montrer $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

2) a) Calculer $I_n + I_{n+1}$.

3) en déduire une simplification de $\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k}$, $n \in \mathbb{N}^*$, puis calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k}$.

Exercice8:

On pose : $\forall n \geq 0 : I_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 (1-t)^n e^t dt$.

1) Montrer : $\forall n \geq 0 : 0 \leq I_n \leq \frac{e}{n!}$

3) Montrer que : $\forall n \geq 0 : I_n = e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$. en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$.

Exercice9:

1) On considère la suite $(S_n)_n$ définie par : $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1}$

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} : \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k = 1 - x + x^2 - \dots + (-1)^n x^n = \frac{(-1)^n x^{n+1} + 1}{x+1}$.

b) Vérifier que : $\forall k \in \mathbb{N}, \int_0^1 x^k dx = \frac{1}{k+1}$ et en déduire que : $S_n = \ln(2) + \int_0^1 \frac{(-1)^n x^{n+1}}{x+1} dx$.

2) On pose : $v_n = S_n - \ln(2) = \int_0^1 \frac{(-1)^n x^{n+1}}{x+1} dx$.

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} : |v_n| \leq \frac{1}{n+2}$ et en déduire la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.